

Zadanie 1. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^5 - 3n^2 + 2n - 3}{2n^3 + 2n^2 + 4n + 3}$$

Rozwiązanie: $-\infty$

Zadanie 2. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln(x)}{x - 1}$$

Rozwiązanie: 1

Zadanie 3. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji

$$f(x) = \frac{-x^2 - e^x}{1 - x}.$$

Rozwiązanie: $D_f: \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Asymptota pionowa dwustronna w $x_0 = 1$.

Asymptota ukośna w minus nieskończoności o równaniu $y = x + 1$.

Zadanie 4. Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{4 - 2x^2}{4x + 2}$$

w punkcie $x_0 = -1$.

Rozwiązanie: Styczna: $y = -4x - 5$, Normalna: $y = \frac{x}{4} - \frac{3}{4}$

Zadanie 5. Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{2x^3}{x - 2}$$

Rozwiązanie: $f'(x) = \frac{4x^2(x-3)}{(x-2)^2}$

$f'(x) > 0$ dla: $3 < x \implies f(x)$ rośnie dla $x \in (3, \infty)$

$f'(x) < 0$ dla: $(0 < x \wedge x < 2) \vee (2 < x \wedge x < 3) \vee x < 0 \implies f(x)$ maleje dla $x \in (-\infty, 2)$ oraz $x \in (2, 3)$

$f'(x) = 0$ dla $x \in \{0, 3\} \implies f_{\min}(3) = 54$

Zadanie 1. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 5}{\sqrt{2n^2 + 3n + 3}}$$

Rozwiązanie: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Zadanie 2. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{9 - 2x}}{3x}$$

Rozwiązanie: $\frac{1}{9}$

Zadanie 3. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji

$$f(x) = x - 2e^x.$$

Rozwiązanie: $D_f: \mathbb{R}$.

Asymptota ukośna w minus nieskończoności o równaniu $y = x$.

Zadanie 4. Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 1}$$

w punkcie $x_0 = -1$.

Rozwiązanie: Styczna: $y = -2x - 1$, Normalna: $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$

Zadanie 5. Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 1}$$

Rozwiązanie: $f'(x) = \frac{2(x-1)(x+2)}{(2x+1)^2}$

$f'(x) > 0$ dla: $1 < x \vee x < -2 \implies f(x)$ rośnie dla $x \in (-\infty, -2)$ oraz $x \in (1, \infty)$

$f'(x) < 0$ dla: $x > -2 \wedge x < 1 \wedge x \neq -\frac{1}{2} \implies f(x)$ rośnie dla $x \in (-2, -\frac{1}{2})$ oraz $x \in (-\frac{1}{2}, 1)$

$f'(x) = 0$ dla $x \in \{-2, 1\} \implies f_{\max}(-2) = -1$ oraz $f_{\min}(1) = 2$

Zadanie 1. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-1} \right)^{5n+4}$$

Rozwiązanie: e^{10}

Zadanie 2. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{2x}$$

Rozwiązanie: $\frac{1}{4}$

Zadanie 3. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji

$$f(x) = -x - 1 + \frac{\ln(x)}{x}.$$

Rozwiązanie: $D_f: (0, \infty)$.

Asymptota pionowa prawostronna w $x_0 = 0$.

Asymptota ukośna w plus nieskończoności o równaniu $y = -x - 1$.

Zadanie 4. Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{4x^2 + x - 2}{4x + 2}$$

w punkcie $x_0 = -1$.

Rozwiązanie: Styczna: $y = \frac{5x}{2} + 2$, Normalna: $y = -\frac{2x}{5} - \frac{9}{10}$

Zadanie 5. Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{3x + 3}$$

Rozwiązanie: $f'(x) = \frac{x(x+2)}{3(x+1)^2}$

$f'(x) > 0$ dla: $0 < x \vee x < -2 \implies f(x)$ rośnie dla $x \in (-\infty, -2)$ oraz $x \in (0, \infty)$

$f'(x) < 0$ dla: $x > -2 \wedge x < 0 \wedge x \neq -1 \implies f(x)$ rośnie dla $x \in (-2, -1)$ oraz $x \in (-1, 0)$

$f'(x) = 0$ dla $x \in \{-2, 0\} \implies f_{\max}(-2) = -\frac{2}{3}$ oraz $f_{\min}(0) = \frac{2}{3}$

Zadanie 1. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4n^2 - 2n - 3} - \sqrt{4n^2 + 5n + 4} \right)$$

Rozwiązanie: $-\frac{7}{4}$

Zadanie 2. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{9 - 3x}}{2x}$$

Rozwiązanie: $\frac{1}{4}$

Zadanie 3. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji

$$f(x) = \frac{-2x^2 - x + 2}{2x + 3}.$$

Rozwiązanie: $D_f: \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}.$

Asymptota pionowa dwustronna w $x_0 = -\frac{3}{2}.$

Asymptota ukośna w plus i minus nieskończoności o równaniu $y = 1 - x.$

Zadanie 4. Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 2}{x + 4}$$

w punkcie $x_0 = 2.$

Rozwiązanie: Styczna: $y = \frac{3x}{2},$ Normalna: $y = \frac{13}{3} - \frac{2x}{3}$

Zadanie 5. Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 + 2x + 1}$$

Rozwiązanie: $f'(x) = -\frac{2(x+2)}{(x+1)^3}$

$f'(x) > 0$ dla: $-2 < x \wedge x < -1 \implies f(x)$ rośnie dla $x \in (-2, -1)$

$f'(x) < 0$ dla: $-1 < x \vee x < -2 \implies f(x)$ maleje dla $x \in (-\infty, -2)$ oraz $x \in (-1, \infty)$

$f'(x) = 0$ dla $x \in \{-2\} \implies f_{\min}(-2) = -1$

Zadanie 1. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3 \cdot 4^n}{2 \cdot 3^n + 4 \cdot 4^n}$$

Rozwiązanie: $\frac{3}{4}$

Zadanie 2. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Rozwiązanie: 0

Zadanie 3. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji

$$f(x) = -x + \operatorname{atan}(x).$$

Rozwiązanie: $D_f: \mathbb{R}$.

Asymptota ukośna w minus nieskończoności o równaniu $y = -x - \frac{\pi}{2}$.

Asymptota ukośna w plus nieskończoności o równaniu $y = -x + \frac{\pi}{2}$.

Zadanie 4. Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = e^{-x^2+x+2}$$

w punkcie $x_0 = 2$.

Rozwiązanie: Styczna: $y = 7 - 3x$, Normalna: $y = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$

Zadanie 5. Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{4x + 2}{x^2 + 2x + 3}$$

Rozwiązanie: $f'(x) = -\frac{4(x-1)(x+2)}{(x^2+2x+3)^2}$

$f'(x) > 0$ dla: $-2 < x \wedge x < 1 \implies f(x)$ rośnie dla $x \in (-2, 1)$

$f'(x) < 0$ dla: $1 < x \vee x < -2 \implies f(x)$ maleje dla $x \in (-\infty, -2)$ oraz $x \in (1, \infty)$

$f'(x) = 0$ dla $x \in \{-2, 1\} \implies f_{\min}(-2) = -2$ oraz $f_{\max}(1) = 1$

Zadanie 1. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 4}{\sqrt{4n^2 - 3n - 3}}$$

Rozwiązanie: $\frac{3}{2}$

Zadanie 2. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)}$$

Rozwiązanie: 2

Zadanie 3. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji

$$f(x) = x - \arctan(x) + 1.$$

Rozwiązanie: $D_f: \mathbb{R}$.

Asymptota ukośna w minus nieskończoności o równaniu $y = x + 1 + \frac{\pi}{2}$.

Asymptota ukośna w plus nieskończoności o równaniu $y = x - \frac{\pi}{2} + 1$.

Zadanie 4. Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{4 - 2x}{x^2 + 3x + 4}$$

w punkcie $x_0 = -1$.

Rozwiązanie: Styczna: $y = \frac{1}{2} - \frac{5x}{2}$, Normalna: $y = \frac{2x}{5} + \frac{17}{5}$

Zadanie 5. Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{2x + 4}{-2x^2 + 2x + 4}$$

Rozwiązanie: $f'(x) = \frac{x(x+4)}{(x-2)^2(x+1)^2}$

$f'(x) > 0$ dla: $(0 < x \wedge x < 2) \vee 2 < x \vee x < -4 \implies f(x)$ rośnie dla $x \in (-\infty, -4)$ oraz $x \in (0, 2)$ oraz $x \in (2, \infty)$

$f'(x) < 0$ dla: $x > -4 \wedge x < 0 \wedge x \neq -1 \implies f(x)$ maleje dla $x \in (-4, -1)$ oraz $x \in (-1, 0)$

$f'(x) = 0$ dla $x \in \{-4, 0\} \implies f_{\max}(-4) = \frac{1}{9}$ oraz $f_{\min}(0) = 1$

Zadanie 1. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{3n+5} \right)^{5n-3}$$

Rozwiązanie: e^{-5}

Zadanie 2. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln(x)}{x-1}$$

Rozwiązanie: 1

Zadanie 3. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji

$$f(x) = \frac{-2x^2 - 2x}{2x + 2}.$$

Rozwiązanie: $D_f: \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Asymptota ukośna w plus i minus nieskończoności o równaniu $y = -x$.

Zadanie 4. Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{3-2x}{x^2+3x+1}$$

w punkcie $x_0 = -2$.

Rozwiązanie: Styczna: $y = 9x + 11$, Normalna: $y = -\frac{x}{9} - \frac{65}{9}$

Zadanie 5. Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{x^3}{3x-1}$$

Rozwiązanie: $f'(x) = \frac{3x^2(2x-1)}{(3x-1)^2}$

$f'(x) > 0$ dla: $\frac{1}{2} < x \implies f(x)$ rośnie dla $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$

$f'(x) < 0$ dla: $(0 < x \wedge x < \frac{1}{3}) \vee (\frac{1}{3} < x \wedge x < \frac{1}{2}) \vee x < 0 \implies f(x)$ maleje dla $x \in (-\infty, \frac{1}{3})$ oraz $x \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

$f'(x) = 0$ dla $x \in \{0, \frac{1}{2}\} \implies f_{\min}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

Zadanie 1. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4^n - 3 \cdot 5^n}{2 \cdot 3^n + 4 \cdot 4^n}$$

Rozwiązanie: $-\infty$

Zadanie 2. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{2 - \sqrt{4 - 3x}}{2x}$$

Rozwiązanie: $-\frac{3}{8}$

Zadanie 3. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 2}{2x^2 - x}.$$

Rozwiązanie: $D_f: \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}\}.$

Asymptota pionowa dwustronna w $x_1 = 0$.

Asymptota pionowa dwustronna w $x_2 = \frac{1}{2}$.

Asymptota pozioma w plus i minus nieskończoności o równaniu $y = 1$.

Zadanie 4. Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{4x + 3}{x^2 + x - 1}$$

w punkcie $x_0 = -1$.

Rozwiązanie: Styczna: $y = -5x - 4$, Normalna: $y = \frac{x}{5} + \frac{6}{5}$

Zadanie 5. Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{3x^3 + x - 1}{2 - 2x}$$

Rozwiązanie: $f'(x) = -\frac{3x^2(2x-3)}{2(x-1)^2}$

$f'(x) > 0$ dla: $(0 < x \wedge x < 1) \vee (1 < x \wedge x < \frac{3}{2}) \vee x < 0 \implies f(x)$ rośnie dla $x \in (-\infty, 1)$ oraz $x \in (1, \frac{3}{2})$

$f'(x) < 0$ dla: $\frac{3}{2} < x \implies f(x)$ maleje dla $x \in (\frac{3}{2}, \infty)$

$f'(x) = 0$ dla $x \in \{0, \frac{3}{2}\} \implies f_{\max}(\frac{3}{2}) = -\frac{85}{8}$

Zadanie 1. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 - 3n + 1} - \sqrt{n^2 + n - 1} \right)$$

Rozwiązanie: -2

Zadanie 2. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x + e^{-x}}{x}$$

Rozwiązanie: -2

Zadanie 3. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{3x}.$$

Rozwiązanie: $D_f: \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Asymptota ukośna w plus i minus nieskończoności o równaniu $y = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$.

Zadanie 4. Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{-x^2 - x - 2}{x + 2}$$

w punkcie $x_0 = -1$.

Rozwiązanie: Styczna: $y = 3x + 1$, Normalna: $y = -\frac{x}{3} - \frac{7}{3}$

Zadanie 5. Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{-x^2 - 2x - 2}{-x - 1}$$

Rozwiązanie: $f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

$f'(x) > 0$ dla: $0 < x \vee x < -2 \implies f(x)$ rośnie dla $x \in (-\infty, -2)$ oraz $x \in (0, \infty)$

$f'(x) < 0$ dla: $x > -2 \wedge x < 0 \wedge x \neq -1 \implies f(x)$ rośnie dla $x \in (-2, -1)$ oraz $x \in (-1, 0)$

$f'(x) = 0$ dla $x \in \{-2, 0\} \implies f_{\max}(-2) = -2$ oraz $f_{\min}(0) = 2$

Zadanie 1. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\sqrt{4n^2 - 3} + \sqrt{4n^2 - n + 1} \right)$$

Rozwiązanie: $-\frac{1}{4}$

Zadanie 2. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - x}}{3x}$$

Rozwiązanie: $\frac{1}{12}$

Zadanie 3. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{1 - x}.$$

Rozwiązanie: $D_f: \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Asymptota ukośna w plus i minus nieskończoności o równaniu $y = -x - 1$.

Zadanie 4. Wyznaczyć równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{x + 4}{-x^2 - x + 3}$$

w punkcie $x_0 = -2$.

Rozwiązanie: Styczna: $y = -5x - 8$, Normalna: $y = \frac{x}{5} + \frac{12}{5}$

Zadanie 5. Zbadać monotoniczność i ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{-x^2 - x + 1}{2x + 4}$$

Rozwiązanie: $f'(x) = -\frac{(x+1)(x+3)}{2(x+2)^2}$

$f'(x) > 0$ dla: $x > -3 \wedge x < -1 \wedge x \neq -2 \implies f(x)$ rośnie dla $x \in (-3, -2)$ oraz $x \in (-2, -1)$

$f'(x) < 0$ dla: $-1 < x \vee x < -3 \implies f(x)$ maleje dla $x \in (-\infty, -3)$ oraz $x \in (-1, \infty)$

$f'(x) = 0$ dla $x \in \{-3, -1\} \implies f_{\min}(-3) = \frac{5}{2}$ oraz $f_{\max}(-1) = \frac{1}{2}$